Esercizi

Meccanica quantistica

Esercizio

Perché in fisica classica non è possibile pensare a una particella come un'onda?

Soluzione

L'onda è un fenomeno collettivo, che coinvolge un insieme di particelle (le molecole di una fune che oscilla, gli atomi dell'aria attraversata da un suono, ecc.) e non una singola particella. Molte grandezze fisiche che descrivono un'onda (frequenza, ampiezza, velocità di propagazione) non sono adatte a descrivere una particella, e, viceversa, le grandezze adatte per descrivere una particella (massa, carica elettrica, posizione, velocità, accelerazione, temperatura, ecc.) non sono adatte a descrivere un'onda.

Esercizio

Anche in fisica classica le misure delle grandezze sono accompagnate da incertezze dovute a varie cause (sensibilità di uno strumento di misura, errori casuali e sistematici, ecc.). Per quale motivo allora il principio di indeterminazione rappresenta una novità rispetto alla fisica classica?

Soluzione

In linea di principio, in fisica classica non vi è nessun limite al grado di accuratezza delle misure. In altre parole, si è sempre assunto che sia possibile trovare accorgimenti sperimentali tali da ridurre le incertezze a quantità arbitrariamente piccole. Invece, in meccanica quantistica, l'indeterminazione è insita nello stato fisico del sistema, ossia è legge di natura.

Esercizio

Supponi che $\Psi_1=(\Psi_{1,1};\ \Psi_{1,2})$ e $\Psi_2=(\Psi_{2,1};\ \Psi_{2,2})$ siano due possibili funzioni d'onda per una particella (per esempio, l'elettrone dell'atomo di idrogeno). Come si sommano queste due funzioni d'onda? Qual è il risultato di $\Psi_1+\Psi_2$?

Soluzione

Le due componenti della funzione d'onda sono, dal punto di vista matematico, come le componenti di un vettore. Infatti, dati due vettori **a**=(a_x;a_y) e **b**=(b_x+b_y), la loro somma vettoriale **c** è:

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=(a_x;a_y)+(b_x;b_y)=(a_x+b_x;a_y+b_y)$$

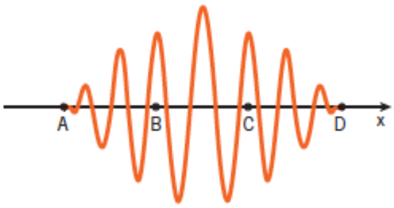
Per analogia, la somma delle due funzioni d'onda è

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = (\Psi_{1,1};\Psi_{1,2}) + (\Psi_{2,1};\Psi_{2,2}) = (\Psi_{1,1} + \Psi_{2,1};\Psi_{1,2} + \Psi_{2,2})$$

vale a dire, la funzione d'onda risultante dalla somma ha due componenti, ciascuna delle quali è la somma delle corrispondenti componenti delle due funzioni d'onda.

Esercizio

La funzione d'onda di una particella ha la forma indicata nella figura a lato. In quale zona (AB, BC o CD) è maggiore la probabilità di trovare la particella?

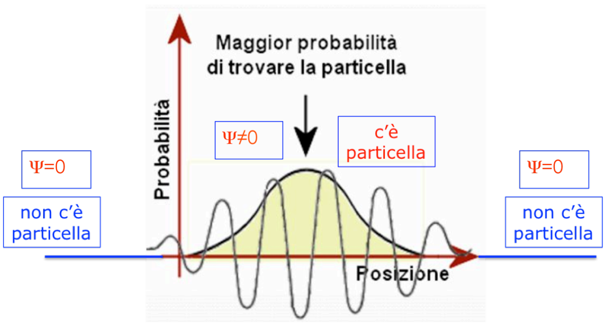


Soluzione

La funzione d'onda è una ampiezza di probabilità. Questo significa che, se stiamo studiando il comportamento di un elettrone, la quantità:

$$|\Psi(x,y,z,t)|^2 \Delta V \qquad densità\ di\ probabilità$$

fornisce la probabilità che l'elettrone si trovi, a un istante di tempo t, in un volume ΔV il cui centro è posto nel punto di coordinate (x, y, z). La *densità di probabilità,* così definita, possiede un preciso significato fisico: non dice dove una particella è in un dato istante, ma semplicemente dove è probabile che sia. In sintesi:



Nelle zone in cui Ψ oscilla, la probabilità di trovarvi una particella è diversa da zero. Non si trova mai la particella fuori da questa regione, dove Ψ è nulla. Da queste considerazioni, possiamo dunque concludere che: la zona tra B e C è quella in cui è maggiore la probabilità di trovare la particella.

Esercizio

Poniamo un atomo di idrogeno in un campo magnetico: il suo spettro di emissione cambia?

Soluzione

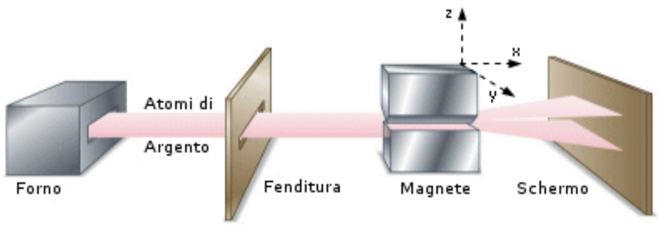
Ci troviamo di fronte all'effetto Zeeman, secondo il quale posto un atomo di idrogeno in un campo magnetico esterno, le righe spettrali si scindono in un certo numero di

componenti molto vicine fra loro. Questo effetto dimostra sperimentalmente come le orbite elettroniche, oltre che essere quantizzate nel momento angolare L, devono essere quantizzate anche nell'orientazione. Ecco il motivo dell'introduzione del numero quantico magnetico m_l. Pertanto, in presenza del campo magnetico esterno, i livelli energetici non dipendono solo dal numero quantico principale n, ma anche dal numero quantico magnetico m_l.
Questo comporta che lo spettro di emissione cambia in quanto si devono apportare delle correzione, che dipendono proprio da m_l, ai livelli energetici E_n calcolati secondo il modello di Bohr. Questo nuovo contributo ΔE_m all'energia dell'elettrone, per via della relazione E=hf, corrisponde una modificazione delle frequenze dello spettro di emissione:

$$E = hf \Rightarrow f = \frac{E}{h} \Rightarrow \Delta f = \frac{\Delta E_m}{h}$$

Esercizio

Il primo esperimento che ha mostrato l'esistenza dello spin è stato condotto da due fisici tedeschi, Stern e Gerlach. I due volevano mostrare la quantizzazione del momento angolare L_z lungo una direzione z dell'elettrone di un atomo. A questo scopo, predisposero un campo magnetico fortemente non omogeneo e lo fecero attraversare da un fascio di atomi. Atomi con diversi valori di L_z subiscono forze differenti dal campo magnetico e si separano. Stern e Gerlach rilevarono nel loro esperimento 2 fasci separati. Spiega perché questi due fasci sono dovuti allo spin dell'elettrone e non al suo momento angolare L_z.



Soluzione

Il momento angolare lungo una direzione $L_z=mh/2\pi$ è quantizzato e i valori possibili sono in quantità dispari, m = −l,−l + 1,−1,0,1 ... l−1...l in quanto l è intero. Per avere un numero pari di fasci l dovrebbe essere semi-intero, per esempio l=1/2, ma questo è possibile solo per lo spin.

Esercizio

Un laser è un generatore di luce, ma la luce che produce è diversa da quella di una lampadina qualsiasi. Quali sono le caratteristiche che distinguono la luce prodotta da un laser rispetto a quella di una lampadina a incandescenza?

Soluzione

A differenza delle normali sorgenti luminose come una lampadina a incandescenza, la luce laser ha determinate caratteristiche: 1) è estremamente monocromatica: cioè caratterizzata da una lunghezza d'onda precisa di circa 1 parte per 10^{15}; b) è notevolmente coerente: la fase iniziale dell'onda emessa è costante su distanze di centinaia di chilometri (la luce di una normale lampadina perde la coerenza dopo circa 1 metro); c) è fortemente direzionale: il fascio laser, essendo fatto di bosoni, ha un parallelismo che non si riesce ad ottenere con i sistemi di focalizzazione della luce; d) può essere focalizzata in modo netto: come conseguenza del parallelismo, si possono ottenere intensità di luce laser focalizzata dell'ordine di 10^{17} W/cm^2.

Esercizio

Un modellino di automobile, la cui massa è 230 g, si muove in linea retta e percorre una distanza di 1,8 m in un intervallo di tempo di 4,5 s. Quanto vale la sua lunghezza d'onda di de Broglie?

Soluzione

Il modulo medio della quantità di moto del modellino è:

$$p = mv = m\frac{\Delta s}{\Delta t} = 0,230 \cdot \frac{1,8}{4,5} = 0,092\ \frac{kg \cdot m}{s}$$

Quindi la sua lunghezza d'onda di de Broglie risulta:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{0,092} = 7,2 \cdot 10^{-33} m$$

La lunghezza d'onda trovata è 31 ordini di grandezza più piccola dell'estensione dell'oggetto a cui si riferisce: essa non può avere alcun effetto fisico apprezzabile sul comportamento dell'automobilina che, quindi, segue le leggi della fisica classica.

Esercizio

Una palla ha una massa di 200 g ed una energia cinetica di 100 J. Quanto vale la lunghezza d'onda di de Broglie della palla? Da questo risultato, puoi dire perché non è possibile osservare le proprietà ondulatorie degli oggetti del mondo macroscopico?

Soluzione

La velocità della palla vale:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100}{0,2}} = 100 \ m/s$$

e, quindi, la sua lunghezza d'onda di de Broglie risulta:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{0,2 \cdot 100} = 0,33 \cdot 10^{-34} m$$

Poichè la lunghezza d'onda di de Broglie della palla è più piccola di qualunque fenditura attraverso cui la palla potrebbe passare, allora non è possibile osservare effetti di diffrazione, tipici delle onde. La palla segue le leggi della fisica classica.

Esercizio

Un elettrone è confinato a muoversi in uno spazio delle dimensioni di $2,5 \text{x} 10^{-10}$ m. Calcola l'energia cinetica di un protone che ha una quantità di moto uguale all'incertezza sulla quantità di moto dell'elettrone.

Soluzione

Se l'elettrone è costretto a muoversi su una retta entro un intervallo di ampiezza Δx, la sua posizione lungo tale coordinata è nota appunto con un'indeterminazione Δx. Per il principio di Heinseberg possiamo scrivere:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$$

L'indeterminazione minima sulla componente x della quantità di moto risulta perciò:

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} / 2\pi}{2,5 \cdot 10^{-10}} = 4,22 \cdot 10^{-25} kg \cdot m/s$$

Poiché l'energia cinetica del protone possiamo esprimerla in funzione della sua quantità di moto, che è pari all'incertezza sulla quantità di moto dell'elettrone, abbiamo:

$$K_{protone} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{\Delta p_{elettr}^2}{2m_{prot}} = \frac{4,22 \cdot 10^{-25}}{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}} = 5,33 \cdot 10^{-23} J = \frac{5,33 \cdot 10^{-23}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 3,3 \cdot 10^{-4} eV$$

Esercizio

La vita media di un elettrone in uno stato eccitato di un atomo è di circa 10 ns e, quando ritorna allo stato fondamentale, l'atomo emette un fotone. Calcola: a) il minimo valore teorico dell'incertezza con cui si può conoscere l'energia del fotone emesso; b) il corrispondente allargamento della riga spettrale, cioè l'intervallo di frequenza nel quale può essere emesso il fotone.

Soluzione

a) Usiamo la seconda relazione d'indeterminazione di Heinsenberg:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar \Rightarrow \Delta E \cong \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} / 2\pi}{10 \cdot 10^{-9}} \cong 10^{-26} J = \frac{10^{-26}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,63 \cdot 10^{-7} eV$$

b) Dalla relazione E=hf, ricaviamo l'intervallo di frequenza (allargamento della riga spettrale) nel quale può essere emesso il fotone:

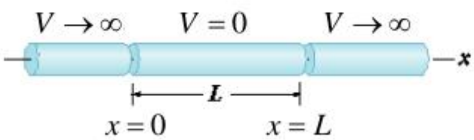
$$E = hf \Rightarrow f = \frac{E}{h} \Rightarrow \Delta f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{10^{-26}}{6,63 \cdot 10^{-34}} \cong 10^{7} Hz$$

Esercizio

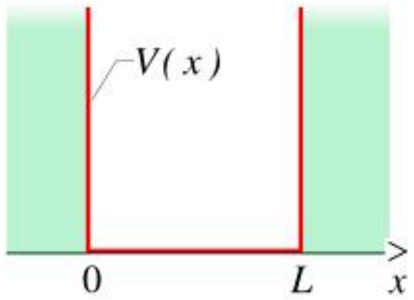
Una particella di massa $m=8x10^{-25}$ kg si trova in una «scatola unidimensionale» di lunghezza $L=2x10^{-6}$ m ed è costretta cioè a muoversi lungo una linea, la cui posizione x è limitata dalla condizione $0<x<L$.
a) Discuti il problema classicamente; b) Discuti il problema quantisticamente e determina la probabilità di trovare la particella in un intervallo $\Delta l=10^{-8}$ m intorno al centro, x=L/2, per ogni valore di n; c) Disegna in un grafico la quantità $\Psi^2_n(x)$ per n=1 e n=2 e indica la probabilità di trovare la particella nella regione $0<x<L/2$ nei due casi.

Soluzione

Analizziamo il problema.
La particella è confinata in una regione limitata di spazio unidimensionale:



ossia si tratta di un tipico esempio di particella costretta a muoversi in una buca di potenziale infinita:



$$V(x) = \begin{cases} 0 & per\ 0 < x < L \\ \infty & per\ x < 0\ e\ x > L \end{cases}$$

a) Dal punto di vista della fisica classica, il problema è equivalente a quello del moto di un corpo tra due pareti perfettamente riflettenti, che avviene con energia totale, pari a quella cinetica $E=p^2/2m$. L'energia può assumere qualunque valore e la densità di probabilità di trovare la particella, misurandola a caso, in un punto qualsiasi $0<x<L$ è uniforme in quanto il moto avviene a velocità costante $|v|=cost$.

b) Quantisticamente, come conseguenza del confinamento della particella, nascono delle condizioni di quantizzazione. Ossia, l'equazione di Schrodinger non dipendente dal tempo (stiamo considerando stati stazionari), in seguito alle condizioni al contorno (confinamento della particella), ammette i seguenti valori di energia degli stati stazionari:

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{8mL^2}n^2 \qquad n = 1,2,3,...$$

Quantisticamente, oltre ad aversi uno spettro discreto dei livelli energetici (livelli permessi), è proibito anche il valore E=0. Ossia esiste una energia minima (minimo livello permesso) per la particella:

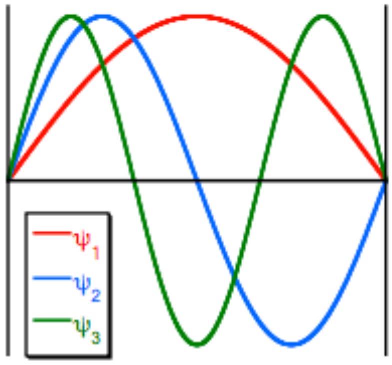
$$E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{8mL^2} \cong 10\ eV$$

Questo fatto è intuitivamente comprensibile come conseguenza del principio d'indeterminazione. Infatti, se fosse possibile $E=p^2/2m=0$ all'interno della "buca", allora avremmo p=0, e quindi:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar \Rightarrow \Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} \xrightarrow{\Delta p = 0} \Delta x \geq \infty$$

Ma ciò non può essere perché la "buca" ha larghezza finita L. Conclusione: i sistemi confinati devono avere E>0.

Agli stati stazionari caratterizzati dai valori E_n, corrispondono le seguenti funzioni d'onda:

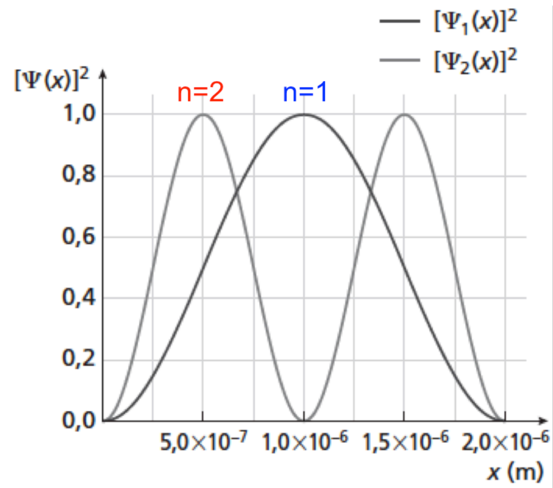


$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x \qquad n = 1,2,3,...$$

La probabilità di trovare la particella nella regione richiesta ($\Delta l = 10^{-8}$m intorno al centro x=L/2) è espressa dalla densità di probabilità (dove a ΔV abbiamo sostituito Δl):

$$\Psi_n^2 \Delta L = \Delta L \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{n\pi}{L} \cdot \frac{L}{2}\right) = \Delta L \frac{2}{L} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \Psi_n^2 \Delta L = 0 \quad n \ pari \\ \Psi_n^2 \Delta L = \Delta L \frac{2}{L} = 10^{-8} \cdot \frac{2}{2 \cdot 10^{-6}} = 0{,}01 = 1\% \quad n \ dispari \end{cases}$$

c) I grafici richiesti sono:



Poiché i due grafici sono simmetrici rispetto alla posizione centrale $x_0=10^{-6}$m, la probabilità di trovare la particella in una metà della "scatola" è del 50% per entrambi i casi.

Esercizio

Un elettrone che passa attraverso uno schermo con due fenditure è descritto dallo stato:

$$\Psi = \frac{1}{2}\Psi_a + \frac{\sqrt{3}}{2}\Psi_b$$

dove Ψ_a è la funzione d'onda dell'elettrone quando sullo schermo è aperta solo la fenditura A e Ψ_b è la funzione d'onda dell'elettrone quando sullo schermo è aperta solo la fenditura B. Qual è la probabilità che l'elettrone passi da ciascuna fenditura quando sono entrambe aperte?

Soluzione

Per il principio di sovrapposizione, lo stato di un elettrone che passa attraveso uno schermo con due fenditure, è dato da:

$$\Psi = a\Psi_a + b\Psi_b$$

dove i coefficienti "a" e "b" sono legati alle probabilità p_A (elettrone che passa attraverso la fenditura A) e p_B (elettrone che passa attraverso la fenditura B):

$$p_A = \frac{a^2}{a^2+b^2} \qquad p_B = \frac{b^2}{a^2+b^2}$$

Poiché:

$$a^2+b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

le probabilità richieste sono:

$$p_A = a^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\% \qquad p_B = b^2 = 0{,}75 = 75\%$$

Esercizio

Un milione di elettroni viene inviato contro uno schermo che contiene duefenditure A e B. Gli elettroni sono inviati uno alla volta. Ogni elettrone è descritto dalla funzione d'onda:

$$\Psi = \sqrt{\frac{2}{5}}\Psi_a + \sqrt{\frac{3}{5}}\Psi_b$$

dove Ψ_a e Ψ_b sono la funzione d'onda che descrivono l'elettrone che passa, rispettivamente, dalla fenditura A o dalla fenditura B. Un rilevatore è posto dietro ciascuna fenditura. Dai una stima di quanti elettroni vengono rilevati dietro la fenditura A e quanti dietro la fenditura B.

Soluzione

La probabilità p_A (elettrone che passa attraverso la fenditura A) e p_B (elettrone che passa attraverso la fenditura B), sono date da:

$$p_A = \frac{a^2}{a^2+b^2} \qquad p_B = \frac{b^2}{a^2+b^2}$$

Poiché:

$$a^2+b^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 = 1$$

le probabilità richieste sono:

$$p_A = a^2 = \frac{2}{5} = 0{,}40 = 40\% \qquad p_B = b^2 = \frac{3}{5} = 0{,}60 = 60\%$$

Pertanto, circa il 40% degli elettroni, cioè circa 400000, vengono rilevati dietro la fenditura A e circa 600000 (il 60%) dietro la fenditura B.

Esercizio

Un atomo di idrogeno il cui elettrone ha numero quantico magnetico $m_l=2$ è posto in una regione in cui è presente un campo magnetico di intensità 1,8 T diretto lungo z. Calcola la variazione dell'energia dell'elettrone in J e in eV. Quanto differisce, in ordini di grandezza, dall'energia dello stato con n=1?

Soluzione

In presenza del campo magnetico esterno (effetto Zeeman), i livelli energetici non dipendono solo dal numero quantico principale n, ma anche dal numero quantico magnetico m_l. Questo comporta che ai livelli energetici E_n bisogna apportare delle correzione che dipendono proprio da m_l. Questo nuovo contributo ΔE_m all'energia dell'elettrone è dato da:

$$\Delta E_{m_l} = \frac{ehB}{4\pi m_e} m_l = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 1{,}8}{4\pi\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}}\cdot 2 = 0{,}33\cdot 10^{-22}\,J = \frac{0{,}33\cdot 10^{-22}}{1{,}6\cdot 10^{-19}} = 2\cdot 10^{-4}\,eV$$

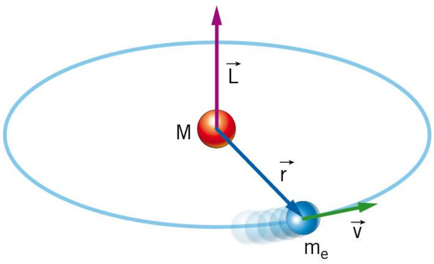
Senza la correzione, il livello energetico n=1 (stato fondamentale) ha energia E_1=-13,6 eV, quindi la variazione dovuta al campo magnetico è di 5 ordini di grandezza inferiore.

Esercizio

Il momento magnetico orbitale di un elettrone è diretto lungo z e ha modulo $1{,}02\times 10^{-22}$ m^2A. Determina il momento angolare dell'elettrone e il numero quantico magnetico m_l.

Soluzione

In base al modello di Bohr, l'elettrone dell'atomo d'idrogeno, che percorre l'orbita chiusa, può essere assimilato a una spira percorsa da corrente. Si dimostra che il momento magnetico di tale spira, ossia dell'elettrone, è dato da:



$$\vec{\mu}_m = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}$$

Anche se nella meccanica ondulatoria abbiamo abbandonato l'idea dell'elettrone che ruota, e quindi il modello di Bohr, quello che interessa è che il momento magnetico **μ** associato all'elettrone è quantizzato come il momento angolare **L**: il suo modulo è individuato dal numero quantico l e la sua componente lungo una data direzione z (scelta parallela al campo magnetico esterno) è individuata dal numero quantico magnetico m_l (quantizzazione spaziale):

$$\mu_m = \frac{e}{2m_e}L_Z$$

Pertanto, il momento angolare dell'elettrone vale:

$$L_Z = \frac{2m_e}{e}\mu_m = \frac{2\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}}{1{,}6\cdot 10^{-19}}\cdot 1{,}02\cdot 10^{-22} = 1{,}2\cdot 10^{-33}\,J\cdot s$$

Per la condizione di quantizzazione spaziale del momento angolare, ossia per un dato numero quantico orbitale *l*, i valori permessi per L_z sono multipli interi della costante di Planck, si ottiene il numero quantico magnetico m_l:

$$L_Z = m_l\hbar \Rightarrow m_l = \frac{L_Z}{\hbar} = \frac{2\pi L_Z}{h} = \frac{2\pi\cdot 1{,}2\cdot 10^{-33}}{6{,}63\cdot 10^{-34}} \cong 11$$

Esercizio

L'elettrone dell'atomo di idrogeno si trova in uno stato che è la sovrapposizione di tre funzioni d'onda:

$$\Psi(x,y,z) = \sqrt{\frac{1}{4}}\Psi_{2,1,1}(x,y,z) + \sqrt{\frac{1}{4}}\Psi_{2,1,0}(x,y,z) + \sqrt{\frac{1}{2}}\Psi_{2,1,-1}(x,y,z)$$

dove gli indici delle funzioni d'onda sono, nell'ordine, il numero quantico principale n, il numero quantico orbitale l e il numero quantico magnetico m_l. a) Qual è la probabilità che la misurazione del modulo del momento angolare dell'elettrone dia √2h/2π? b) Quali sono i possibili risultati della misurazione di L_z, la componente lungo z del momento angolare?

Soluzione

a) La condizione di quantizzazione del momento angolare modello ci dice che:

$$L = \sqrt{l(l+1)} \qquad l = 0,1,2,...,n-1 \;\; \textit{numero quantico orbitale}$$

Poiché gli stati della sovrapposizione hanno tutti numero quantico orbitale l=1, il modulo del momento angolare è:

$$L = \sqrt{2}\hbar$$

e la probabilità che la sua misurazione abbia questo valore è del 100%.

b) L'insieme dei tre numeri quantici *(n,l,m)* individua una particolare funzione d'onda, risultante dall'equazione di Schrodinger. A ciascuna terna corrisponde una diversa distribuzione dell'elettrone nello spazio. La nostra funzione d'onda è la sovrapposizione di 3 stati con numero quantico magnetico m_l=-1,0,1, e quindi una misurazione del momento angolare lungo la direzione z può dare tre esiti:

$$L_Z = m_l\hbar \Rightarrow \begin{cases} L_Z = -\hbar \\ L_Z = 0 \\ L_Z = \hbar \end{cases}$$

Esercizio

Un elettrone è costretto a muoversi in uno spazio unidimensionale lungo 0,1nm. Calcola, in eV, la minima energia cinetica che l'elettrone può possedere.

Soluzione

Se l'elettrone è costretto a muoversi su una retta entro un intervallo di ampiezza Δx, la sua posizione lungo tale coordinata è nota appunto con un'indeterminazione Δx. In base alle relazioni di indeterminazione di Heisenberg possiamo scrivere:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$$

L'indeterminazione minima sulla componente x della quantità di moto risulta perciò:

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} / 2\pi}{10^{-10}} = 10^{-24} kg \cdot m / s$$

Poiché l'energia cinetica vale:

$$K = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{p^2}{2m_e}$$

la minima energia cinetica che l'elettrone può possedere si ha per $p_x = \Delta p_x$, quindi:

$$K_{\min} = \frac{\Delta p_x^2}{2m_e} = \frac{(10^{-24})^2}{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}} = 0,066 \cdot 10^{-17} J = \frac{0,066 \cdot 10^{-17}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 4\ eV$$

Esercizio

Considera le righe della serie di Lyman, dovute all'emissione di radiazione da parte dell'atomo di idrogeno quando l'elettrone passa dallo stato con numero quantico principale n<1 allo stato con numero quantico principale n=1. a) Spiega per quale motivo, in presenza di un campo magnetico **B** uniforme, ogni riga di emissione si suddivide in più righe. b) Esamina ora l'emissione di radiazione da parte dell'atomo di idrogeno quando l'elettrone passa dallo stato con numero quantico principale n=2 e numero quantico orbitale l=1 allo stato con numero quantico principale n=1. Quante righe vengono rilevate sperimentalmente? c) Calcola la differenza delle lunghezze d'onda tra le righe adiacenti quando il campo magnetico ha intensità 3 T.

Soluzione

a) Ci troviamo di fronte all'effetto Zeeman, secondo il quale posto un atomo di idrogeno in un campo magnetico esterno, le righe spettrali si scindono in un certo numero di componenti molto vicine fra loro. Questo effetto dimostra sperimentalmente come le orbite elettroniche, oltre che essere quantizzate nel momento angolare L, devono essere quantizzate anche nell'orientazione. Ecco il motivo dell'introduzione del numero quantico magnetico m_l. Pertanto, in presenza del campo magnetico esterno, i livelli energetici non dipendono solo dal numero quantico principale n, ma anche dal numero quantico magnetico m_l.
Questo comporta che lo spettro di emissione cambia in quanto si devono apportare delle correzione, che dipendono proprio da m_l, ai livelli energetici E_n calcolati secondo il modello di Bohr. Questo nuovo contributo ΔE_m all'energia dell'elettrone, per via della relazione E=hf, corrisponde una modificazione delle frequenze dello spettro di emissione:

$$E = hf \Rightarrow f = \frac{E}{h} \Rightarrow \Delta f = \frac{\Delta E_m}{h}$$

b) Lo stato con numero quantico n=1 ha numero quantico orbitale l=0 e quindi anche m_l=0. Invece gli stati con n=2 e l=1 sono 3 e hanno numeri quantici magnetici m_l=–1,0,1.

c) Lo stato con m_l=0 mantiene la sua energia:

$$\Delta E_{m_l} = \frac{ehB}{4\pi m_e} m_l \xrightarrow{m_l=0} \Delta E_{m_l} = 0$$

gli altri con m_l=1 e m_l=-1 la variano di una quantità, in più o in meno, pari a:

$$\Delta E_{m_l} = \frac{ehB}{4\pi m_e} m_l \xrightarrow{m_l=1} \Delta E_{m_l} = \frac{1,6\cdot10^{-19}\cdot6,63\cdot10^{-34}\cdot1,8}{4\pi\cdot9,11\cdot10^{-31}}\cdot1 = 2,8\cdot10^{-23}\,J$$

$$\Delta E_{m_l} = \frac{ehB}{4\pi m_e} m_l \xrightarrow{m_l=-11} \Delta E_{m_l} = \frac{1,6\cdot10^{-19}\cdot6,63\cdot10^{-34}\cdot1,8}{4\pi\cdot9,11\cdot10^{-31}}\cdot(-1) = -2,8\cdot10^{-23}\,J$$

d) Questa variazione di energia produce una variazione di frequenze in modulo pari a:

$$|\Delta f| = \frac{\Delta E}{h}$$

e una corrispondente variazione di lunghezza d’onda pari a:

$$|\Delta\lambda| = \lambda - \lambda_0 = \frac{c}{f} - \frac{c}{f_0} = c\left(\frac{f_0 - f}{f\cdot f_0}\right) = -\frac{c}{f\cdot f_0}(f_0 - f) = -\frac{\lambda\cdot\lambda_0}{c}(f_0 - f) \cong \frac{\lambda_0^2}{c}\Delta f$$

tenendo conto della relazione precedente per Δf, si ottiene:

$$|\Delta\lambda| \cong \frac{c\Delta E}{f_0^2 h}$$

dove f_0 è la frequenza di emissione quando il campo magnetico è assente. In termini delle energie di Bohr E_n:

$$f_0 = \frac{E_2 - E_1}{h}$$

In definitiva, il modulo della variazione della lunghezza d’onda delle due nuove righe è:

$$|\Delta\lambda| = \frac{ch\Delta E}{(E_2 - E_1)^2} = \frac{3\cdot 10^8 \cdot 6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 2{,}8\cdot 10^{-23}}{(16\cdot 10^{-19})^2} = 2{,}1\cdot 10^{-12} m = 2{,}1\ pm$$

dove:

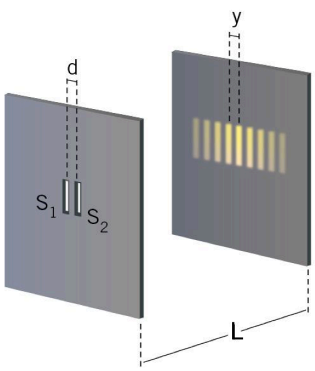
$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2} \Rightarrow E_1 = -13{,}6\ eV \quad E_2 = -3{,}4\ eV \Rightarrow E_2 - E_1 \approx 10\ eV = 10\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19} = 16\cdot 10^{-19} J$$

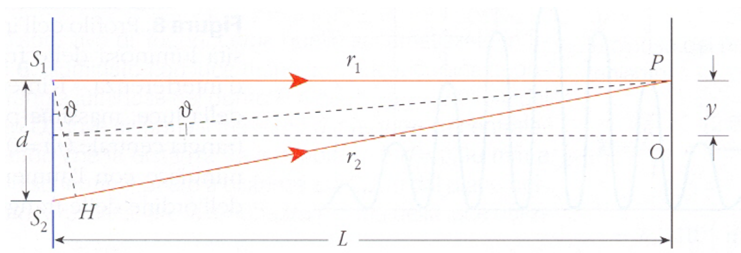
Esercizio

Un pennello di luce monocromatica emessa da un laser illumina perpendicolarmente una doppia fenditura praticata in uno schermo A. Le due fenditure distano fra loro 0,10 mm. Al di là della doppia fenditura, a una distanza di 2,00 m dallo schermo A e parallelamente allo stesso schermo, è disposto uno schermo B su cui si raccoglie la luce proveniente dalle due fenditure. Il primo massimo laterale è situato a una distanza di 10,0 mm dal massimo centrale. La luce emessa dallo stesso laser colpisce, successivamente, una placca di rame, la cui minima frequenza per produrre l'effetto fotoelettrico vale f_0=1,08x10^{15} Hz, e poi una di cesio con f_0= 4,34x10^{14} Hz. a) Calcola la lunghezza d'onda della luce emessa dal laser. b) Determina se dalla placca di rame (e di cesio) ci sarà emissione di elettroni.

Soluzione

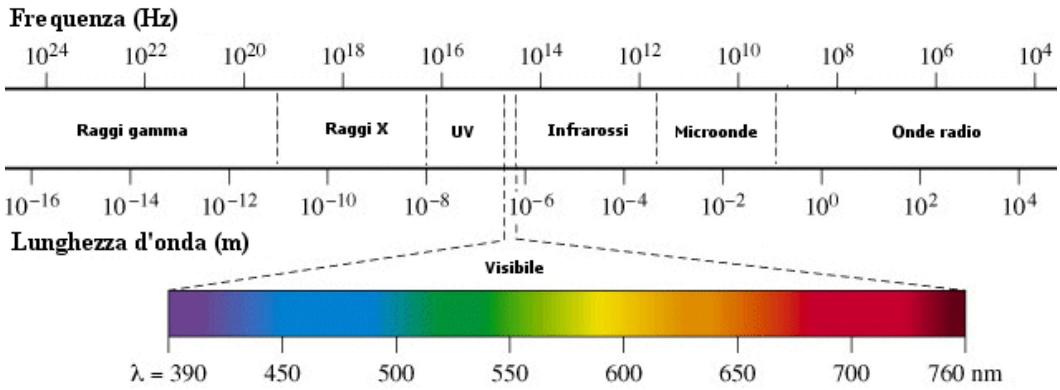
a) La situazione può essere così schematizzata:





I due cammini ottici S_1P e S_2P differiscono esattamente di una lunghezza d'onda, dato che P è la prima frangia laterale luminosa, cioè è un massimo di interferenza. Se L>>d, dalla formula dell'interferenza si ottiene:

$$\lambda = \frac{dy}{L} = \frac{0{,}10\cdot 10^{-3}\cdot 10\cdot 10^{-3}}{2} = 0{,}50\cdot 10^{-6} m = 500\ nm$$



Si tratta di luce blu-verde.

b) La frequenza del laser in esame risulta:

$$c = \lambda f \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{500 \cdot 10^{-9}} = 6 \cdot 10^{14}\, Hz$$

$$rame \Rightarrow f < f_0 \Rightarrow non\ c'è\ emissione\ di\ elettroni$$
$$cesio \Rightarrow f > f_0 \Rightarrow c'è\ emissione\ di\ elettroni$$